



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Condiție: $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.	1p
	Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \log_3(2^x + 1)$ este bijectivă, având inversa $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2(3^x - 1)$. Ecuția se scrie echivalent $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$, (f este strict crescătoare), deoarece se știe că funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice în raport cu prima bisectoare. Deci valorile vor coincide pe dreapta $y = x$, când $f(x) = f^{-1}(x) = x$.	2p
	Ecuția $f(x) = x \Leftrightarrow \log_3(2^x + 1) = x \Leftrightarrow 2^x + 1 = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ are soluția $x = 1$.	2p
	Demonstrarea că ecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ are soluția unică $x = 1$.	2p
2.	$2^{k+1} \sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}} = 2^{k+1} \sqrt{1 + \frac{2}{2k-1}} > 1, \forall k = \overline{1, n}$ de unde prin însumare după k , obținem $A > n$.	3p
	Să demonstrăm că $A < n + 1$. Conform inegalității mediilor, pentru fiecare $k = \overline{1, n}$, obținem $2^{k+1} \sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}} = 2^{k+1} \sqrt{1 + \frac{2}{2k-1}} = 2^{k+1} \sqrt{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{2k} \cdot \left(1 + \frac{2}{2k-1}\right)} < \frac{2k \cdot 1 + 1 + \frac{2}{2k-1}}{2k+1} =$ $= 1 + \frac{2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = 1 + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}.$	2p

	<p>Prin însumare, după k, a celor n inegalități obținem $A < n+1 - \frac{1}{2n+1} < n+1$ $n < A < n+1$ rezultă că $[A] = n$.</p>	2p
3.	<p>Fie $z = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$, $r \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $t \in [0, 2 \cdot \pi)$.</p> <p>Inegalitatea din enunț devine: $\left(\sum_{k=1}^n r^k \cdot \sin(k \cdot t)\right)^2 < \frac{n - \sum_{k=1}^n \cos(2 \cdot k \cdot t)}{2}$.</p>	2p
	<p>Utilizând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz, obținem:</p> $\left(\sum_{k=1}^n r^k \cdot \sin(k \cdot t)\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n r^{2 \cdot k} \cdot \sum_{k=1}^n \sin^2(k \cdot t) = r^2 \cdot \frac{1 - r^{2 \cdot n}}{1 - r^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1 - \cos(2 \cdot k \cdot t)}{2} =$ $r^2 \cdot \frac{1 - r^{2 \cdot n}}{1 - r^2} \cdot \frac{n - \sum_{k=1}^n \cos(2 \cdot k \cdot t)}{2} < \frac{n - \sum_{k=1}^n \cos(2 \cdot k \cdot t)}{2} \text{ deoarece}$	3p
	<p>Din $r \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow 0 < 1 - r^{2 \cdot n} < 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$</p> $\left. \begin{array}{l} 0 < \frac{r^2}{1 - r^2} < 1 \text{ (pentru că } r^2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)) \end{array} \right\} \Rightarrow r^2 \cdot \frac{1 - r^{2 \cdot n}}{1 - r^2} < 1.$	2p
4.	<p>$f(x) = [(x+1) \cdot (x+4)] \cdot [(x+2) \cdot (x+3)] \Rightarrow f(x) = (x^2 + 5 \cdot x + 4) \cdot (x^2 + 5 \cdot x + 6) \Rightarrow$ $f(x) = (x^2 + 5 \cdot x)^2 + 10 \cdot (x^2 + 5 \cdot x) + 24.$</p>	2p
	<p>Fie funcțiile $g(x) = x^2 + 5 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$ și $h(x) = x^2 + 10 \cdot x + 24$, $x \in \mathbb{R}$.</p> <p>Atunci $f(x) = (h \circ g)(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Observăm că</p> $\min_{x \in \mathbb{R}} (g(x)) = -\frac{25}{4} \Rightarrow g(\mathbb{R}) = \left[-\frac{25}{4}, \infty\right);$ $\min_{x \in \mathbb{R}} (h(x)) = -1 \Rightarrow h\left(\left[-\frac{25}{4}, \infty\right)\right) = [-1, \infty);$	2p
	<p>Așadar, funcțiile $g: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{25}{4}, \infty\right)$ și $h: \left[-\frac{25}{4}, \infty\right) \rightarrow [-1, \infty)$ sunt surjective, de unde rezultă că și funcția $h \circ g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, \infty)$ este surjectivă $\Rightarrow (h \circ g)(\mathbb{R}) = [-1, \infty)$. Rezultă că $f(\mathbb{R}) = [-1, \infty)$.</p>	3p